

La relativité générale et la cosmologie moderne: des activités pour les élèves du secondaire II

Dr. Alice Gasparini – Prof. Dr. Andreas Müller
SwissMAP et Collège Rousseau – UniGE (IUFE, Faculté des Sciences)

Présentation pour les enseignants



SwissMAP

The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

FACULTÉ DES SCIENCES
Didactique de la physique

Outline

- Contexte et présentation du cours
- Motivation et objectifs du projet pédagogique
- Exemples d'activités

Contexte

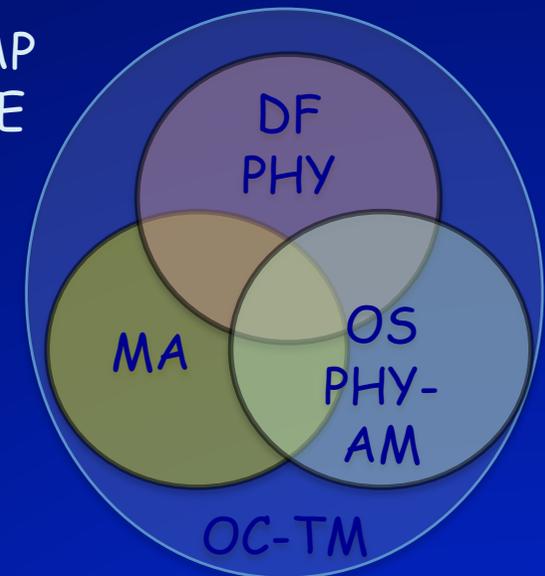
Projet pédagogique lancé par le pôle de recherche SwissMAP ("The Mathematics of Physics"), soutenu par le FNS, l'UniGE et l'ETH-Zurich, à l'occasion du centenaire de la publication de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein

Contexte

Projet pédagogique lancé par le pôle de recherche SwissMAP ("The Mathematics of Physics"), soutenu par le FNS, l'UniGE et l'ETH-Zurich, à l'occasion du centenaire de la publication de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein

Modalités:

- Cours de deux semestres (2h/sem) pour option complémentaire (OC), ou
- « Boîte à outils » d'activités à introduire ponctuellement dans les cours traditionnels de physique (DF, OS) ou applications des mathématiques



Contexte

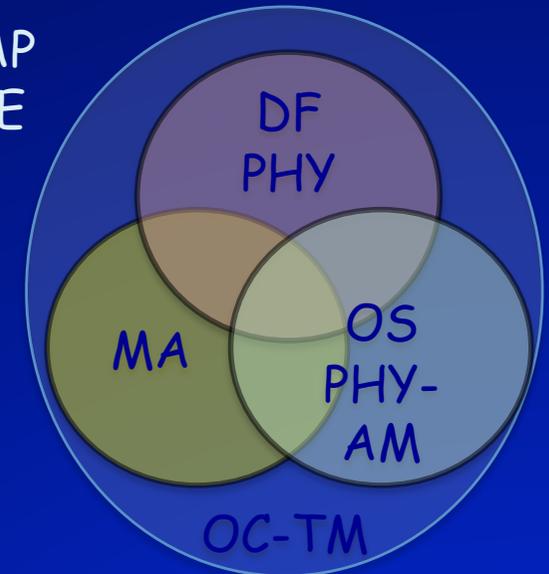
Projet pédagogique lancé par le pôle de recherche SwissMAP ("The Mathematics of Physics"), soutenu par le FNS, l'UniGE et l'ETH-Zurich, à l'occasion du centenaire de la publication de la théorie de la relativité générale par Albert Einstein

Modalités:

- Cours de deux semestres (2h/sem) pour option complémentaire (OC), ou
- « Boîte à outils » d'activités à introduire ponctuellement dans les cours traditionnels de physique (DF, OS) ou applications des mathématiques

Matériel:

- Cours de 9 chapitres et 7 annexes (environ 200 pages):
A. Gasparini « *Cosmologie et Relativité Générale: Une première approche* », Presses Polytechniques Universitaires Romandes (2018)
- 9 séries d'exercices et 2 activités avec corrigé :
Alice Gasparini & A. Müller « *Cosmologie et Relativité Générale: Activités pour les élèves du secondaire II* », SwissMAP/Université de Genève (2017)
- Le matériel est librement disponible online sur le site web
<http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/GRcourse>



1. Consolider les notions de physique et de mathématiques enseignées traditionnellement aux élèves en les appliquant à des sujets motivants.

=> Le but n'est *pas* de *remplacer* mais de *compléter* les notions "classiques" du curriculum

Motivation et objectifs

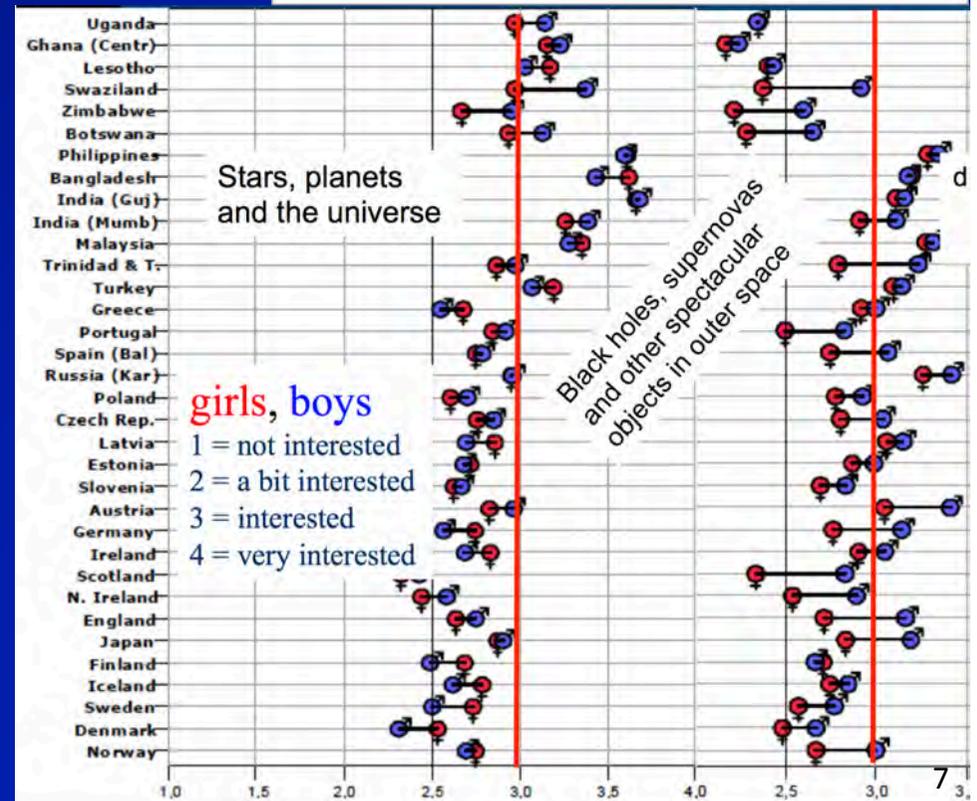
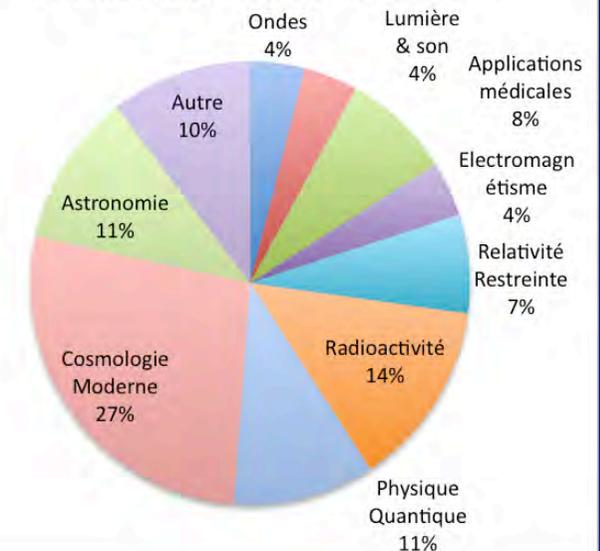
1. Consolider les notions de physique et de mathématiques enseignées traditionnellement aux élèves en les appliquant à des sujets motivants.

⇒ Le but n'est *pas* de *remplacer* mais de *compléter* les notions "classiques" du curriculum

Résultats de l'étude "ROSE"
(Relevance of Science Education)

- Résultats similaires dans tous les pays
- Moyenne autour du 2 (« un peu intéressé ») pour des sujets de science "ordinaires".

Préférences élèves 2DF Rousseau -
A.Chavanne, Novembre 2016



2. Renforcer le lien entre l'enseignement au secondaire II et la recherche universitaire:

D'UNE PART la recherche actuelle compte sur les **nouvelles générations** pour progresser.

D'AUTRE PART les **mathématiques** de la relativité générale (RG) sont **inaccessibles** aux collégiens

=> les notions de physique traditionnellement enseignées en tant que telles ne dépassent pas celles du 19^{ème} siècle

=> les élèves ont souvent une **idée biaisée des enjeux de la physique moderne**

2. Renforcer le lien entre l'enseignement au secondaire II et la recherche universitaire:

D'UNE PART la recherche actuelle compte sur les **nouvelles générations** pour progresser.

D'AUTRE PART les **mathématiques** de la relativité générale (RG) sont **inaccessibles** aux collégiens

=> les notions de physique traditionnellement enseignées en tant que telles ne dépassent pas celles du 19^{ème} siècle

=> les élèves ont souvent une **idée biaisée des enjeux de la physique moderne**

POURTANT il n'est pas nécessaire de connaître le formalisme mathématique derrière la RG pour avoir une vision d'ensemble illustrative et motivante des questions de la physique moderne.

Commentaires extraits du questionnaire aux étudiants en microtechnique, n'ayant pas choisi d'OS PYAM (cours de Physique Générale 1, 1^{ère} année EPFL):

- « Le niveau acquis dans les gymnases vaudois, si l'on n'a pas choisi l'option math-physique, ne prépare PAS DU TOUT aux cours suivis à l'EPFL, il serait bien d'introduire un cours préparatoire spécial. »
- « Il est très difficile d'assimiler et mettre en pratique directement des concepts jamais vus auparavant et de reconstruire sur des bases semi certaines. »
- « À la base, j'avais prévu de faire polymaths pour compenser mes grosses lacunes mathématiques et physiques, mais cela a été supprimé. J'avais trop de lacunes pour suivre correctement.
- « La façon de voir la matière varie fortement entre le gymnase et l'uni, la matière apprise au gymnase est bien plus *ancrée* car elle résulte d'un apprentissage plus lent et encadré. Plus on voit au gymnase, mieux c'est. »

3. Niveau de transposition intermédiaire:

- pas pour le « large public » (zéro équations),
- pas pour un cours universitaire.

- Tous les contenus sont basés exclusivement sur les mathématiques et la physique du **plan d'études** du lycée/collège.
- La description de l'univers dans son ensemble nécessite la connaissance de contenus de physique apparemment éloignés (thermodynamique, bases de relativité restreinte, physique de particules, effet de marée)

=> les annexes complètent le cours de sorte à compléter ces connaissances
- Niveau progressif et parcours thématiques tout au long des chapitres

Introduction au sujet

Chapitres 1 et 2:
Grandeurs et Expansion

- Estimation de la probabilité de collision entre 2 étoiles vs 2 galaxies (S1 ex4)

Une galaxie possède plusieurs centaines de milliards d'étoiles.
Lors d'une collision, on estime à quelques unités le nombre d'étoiles qui collisionnent.

$$\frac{r_{ét}}{d_{ét}} \ll \frac{r_{gal}}{d_{gal}}$$

- Estimation de la probabilité de collision entre 2 étoiles vs 2 galaxies (S1 ex4)

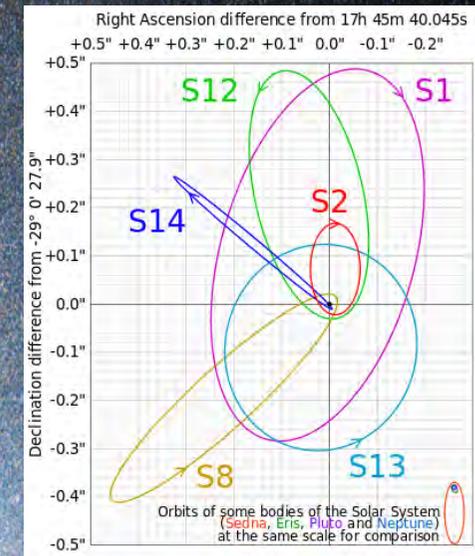
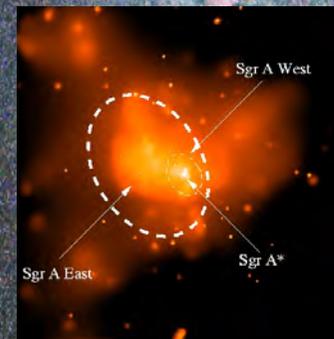
$$\frac{r_{ét}}{d_{ét}} \ll \frac{r_{gal}}{d_{gal}}$$

Une galaxie possède plusieurs centaines de milliards d'étoiles. Lors d'une collision, on estime à quelques unités le nombre d'étoiles qui collisionnent.

- L'orbite de l'étoile S2 (S1 ex5+S6 ex6)

S2 est une étoile en orbite autour du noyau galactique.

- Estimation de sa vitesse moyenne (approx. MCU), et comparaison avec l'orbite de Pluton (S1 ex5)
- Estimation de la masse contenue dans l'orbite (ODG) + comparaison du rayon de Schwarzschild avec le périhélie de S14 => trou noir supermassif (S6 ex6)



- Estimation de la probabilité de collision entre 2 étoiles vs 2 galaxies (S1 ex4)

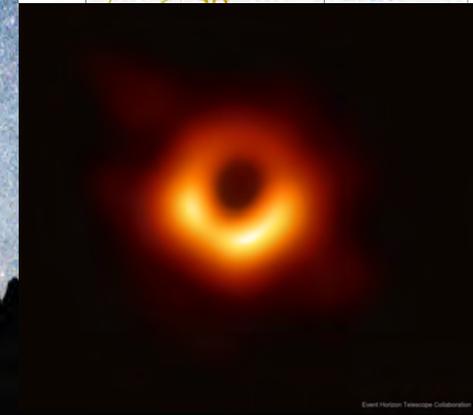
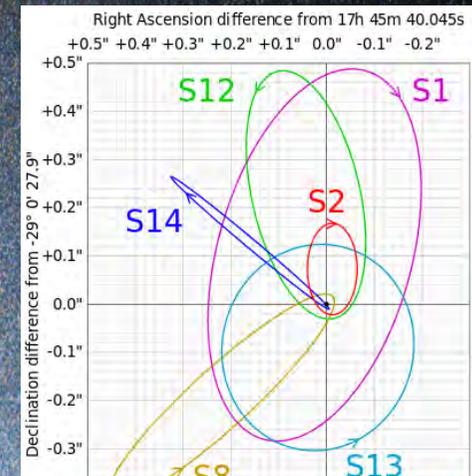
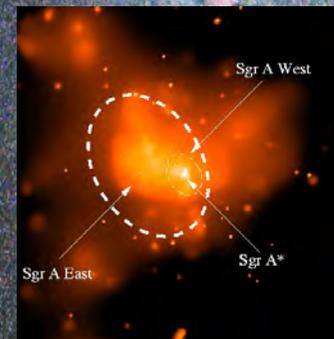
Une galaxie possède plusieurs centaines de milliards d'étoiles.
Lors d'une collision, on estime à quelques unités le nombre d'étoiles qui collisionnent.

$$\frac{r_{ét}}{d_{ét}} \ll \frac{r_{gal}}{d_{gal}}$$

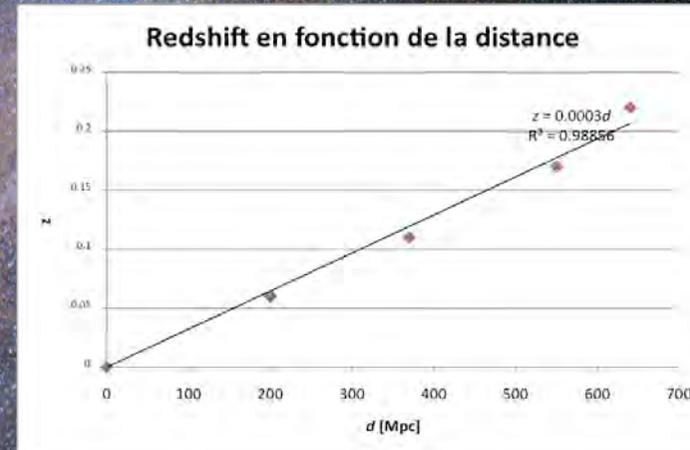
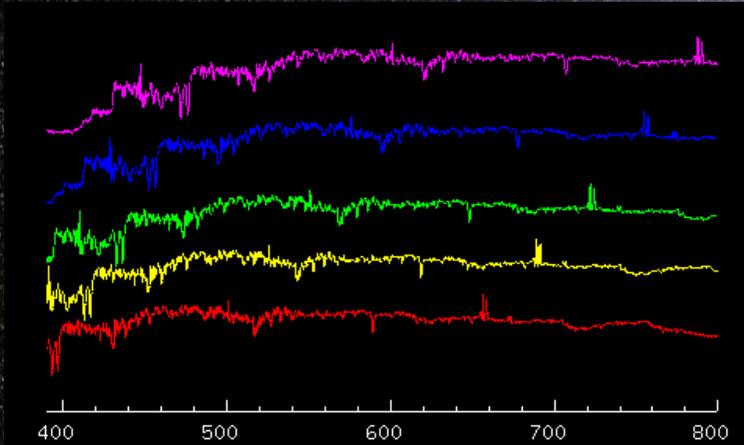
- L'orbite de l'étoile S2 (S1 ex5+S6 ex6)

S2 est une étoile en orbite autour du noyau galactique.

- Estimation de sa vitesse moyenne (approx. MCU), et comparaison avec l'orbite de Pluton (S1 ex5)
- Estimation de la masse contenue dans l'orbite (ODG) + comparaison du rayon de Schwarzschild avec le périhélie de S14 => trou noir supermassif (S6 ex6)

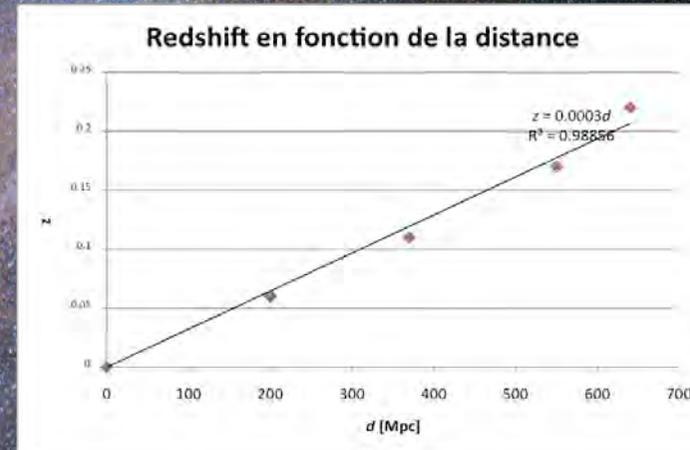
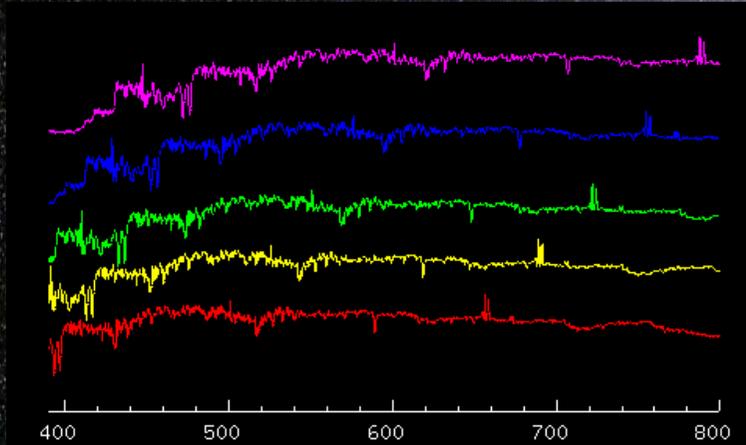


- Loi de Hubble par le spectre des galaxies proches (A1)



- ✓ Proportionnalité appliquée à la physique
- ✓ Conversion d'unités
- ✓ Vitesse de la lumière
- ✓ Spectre d'une source

- Loi de Hubble par le spectre des galaxies proches (A1)



- ✓ Proportionnalité appliquée à la physique
- ✓ Conversion d'unités
- ✓ Vitesse de la lumière
- ✓ Spectre d'une source

- Comparer la vitesse d'expansion (ODG) aux vitesses relatives des astres à des différentes échelles (S2 ex3)

$$H_0 = 70 \text{ km/s} / \text{Mpc} = \dots / \text{km} = \dots / \text{Gpc}$$

=> Pourquoi à notre échelle nous pouvons négliger l'expansion?

=> À partir de quelle échelle on ne peut plus la négliger?

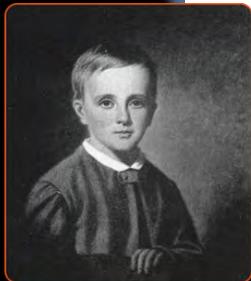
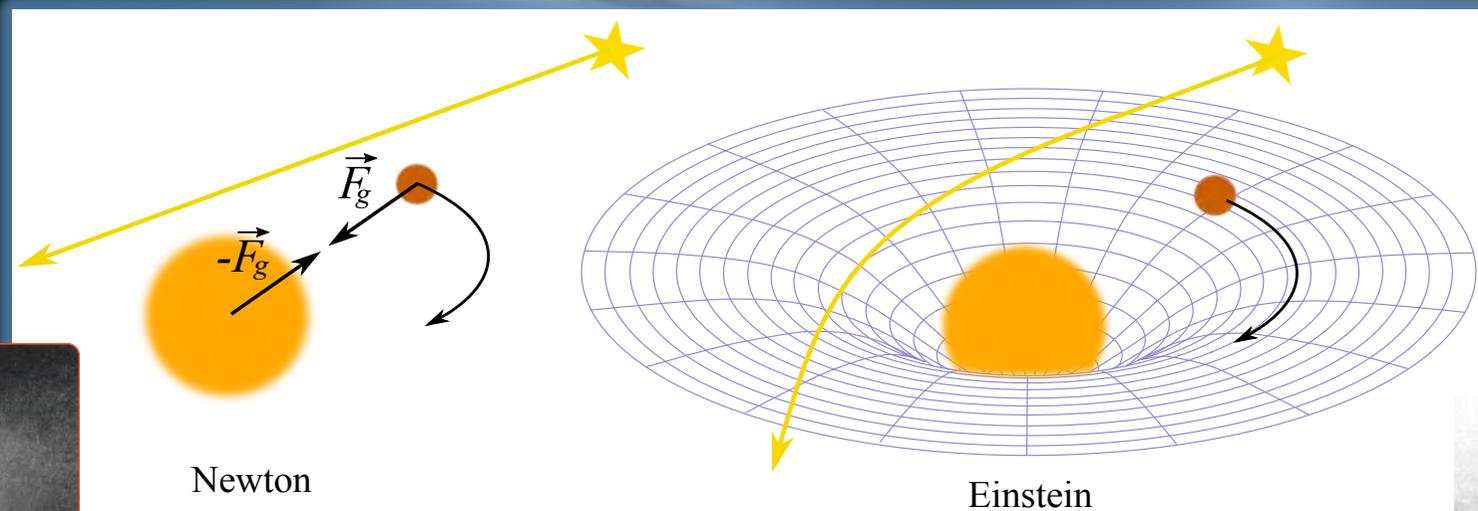
La gravité pour décrire l'univers

Chapitres 3 et 4:
Principe d'équivalence et courbure de l'espace-temps

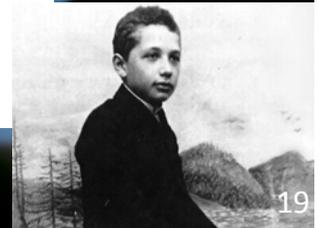
- Comparaison entre l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique (S1 ex6) + (S3 ex1) + (S8 ex7)
 - Intensité ($F_{em}/F_g \approx 10^{39}$) + charges (2 ou 1) + attraction/répulsion (S1, ex6)
=> pourquoi la gravitation domine aux grandes échelles (et l'électromagnétisme aux petites échelles)
 - Pour que $F_{em} \approx F_g$ il faut que le rapport entre la masse m et la charge q d'une particule soit $m/q \approx 10^{10}$ kg/C => énergie d'unification pour $q = e$ (S8, ex7)

Exemples d'activités: Ch. 3&4 (RG)

- Comparaison entre l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique (S1 ex6) + (S3 ex1) + (S8 ex7)
 - Intensité ($F_{em}/F_g \approx 10^{39}$) + charges (2 ou 1) + attraction/répulsion (S1, ex6)
=> pourquoi la gravitation domine aux grandes échelles (et l'électromagnétisme aux petites échelles)
 - Pour que $F_{em} \approx F_g$ il faut que le rapport entre la masse m et la charge q d'une particule soit $m/q \approx 10^{10}$ kg/C => énergie d'unification pour $q = e$ (S8, ex7)
 - « Charge » gravitationnelle et masse inerte => la « pensée heureuse » d'Einstein (S3, ex1)



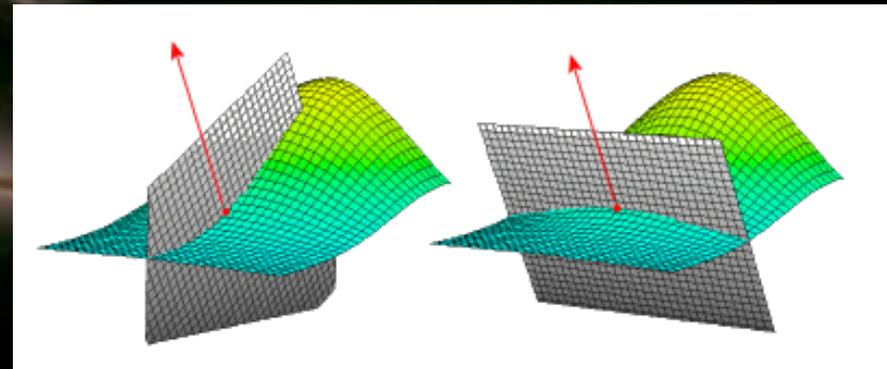
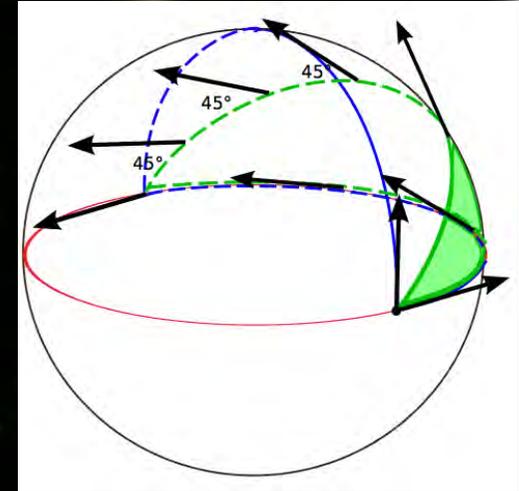
Newton



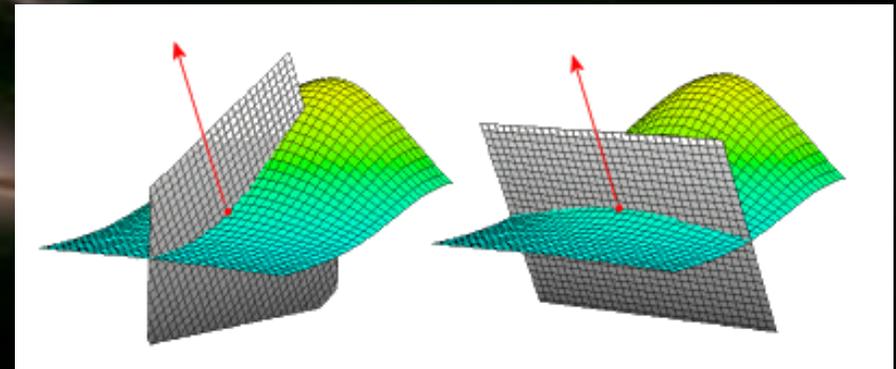
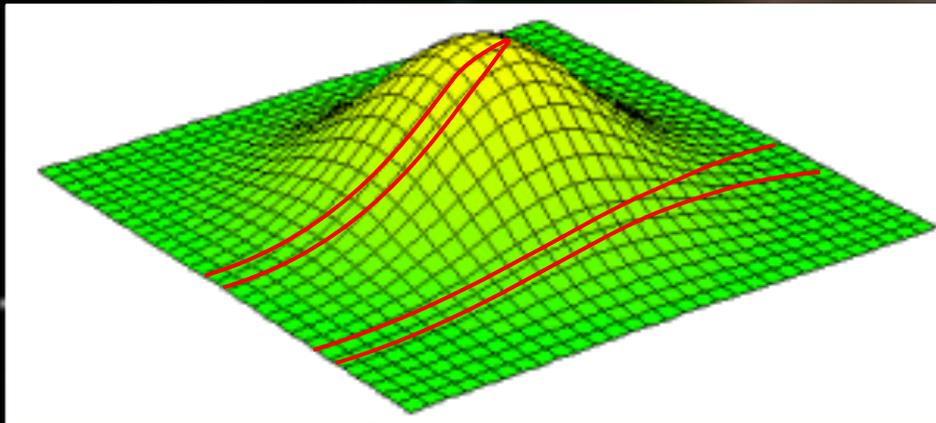
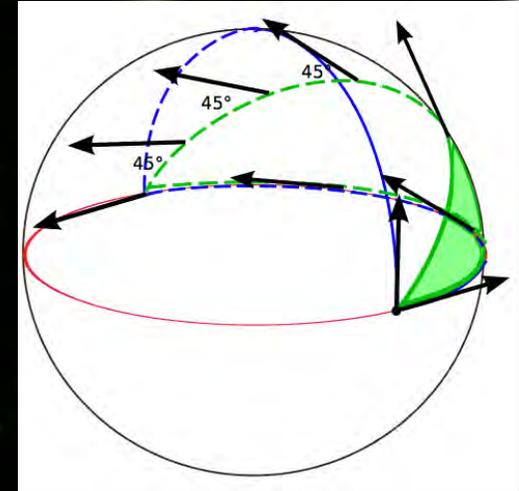
Einstein

Exemples d'activités: Ch. 3&4 (RG)

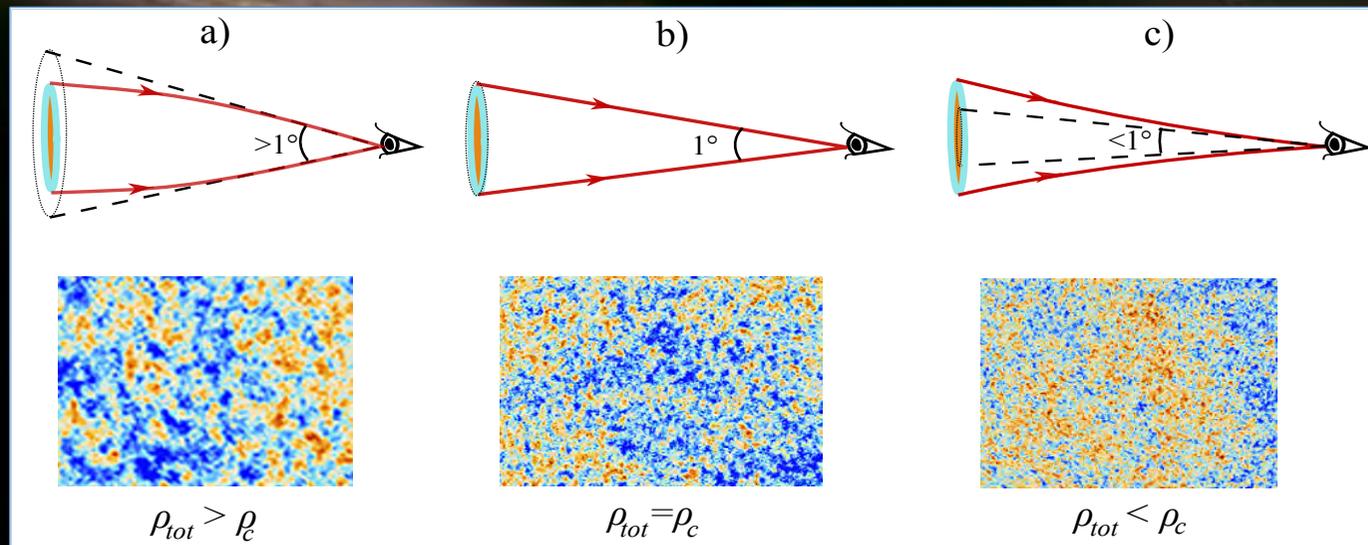
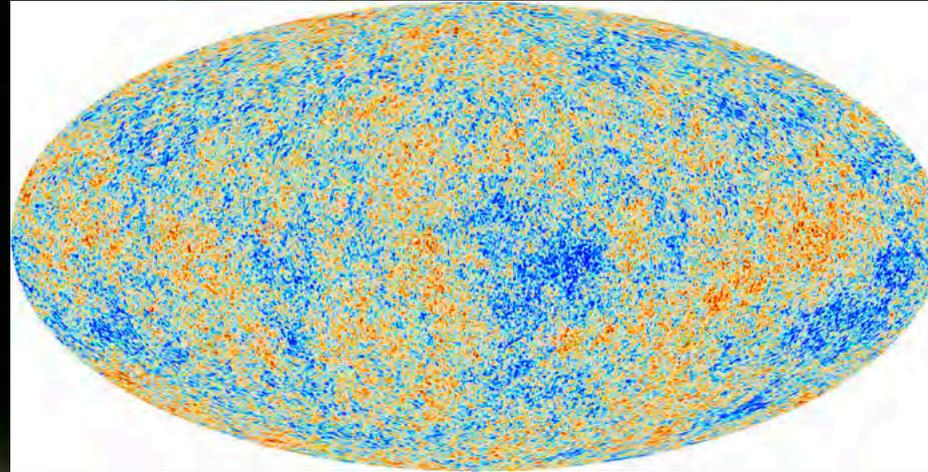
- Courbure totale d'une surface:
le transport parallèle (S4 ex4)
- La courbure de Gauss en un point près
d'une masse (S4 ex3 + manip)



- Courbure totale d'une surface:
le transport parallèle (S4 ex4)
- La courbure de Gauss en un point près
d'une masse (S4 ex3 + manip)
- Géodésiques et triangles en
présence courbure
(cours par 4.4)



• Courbure de l'univers et densité critique (cours par 4.6)



Les applications remarquables de la RG

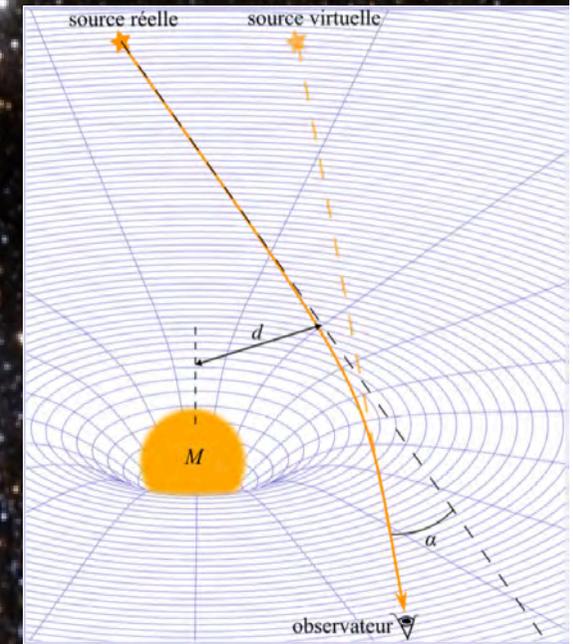
Chapitres 5 et 6:
Lentilles gravitationnelles et trous noirs

Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de l'angle de déviation α par simple analyse dimensionnelle (S5 ex1)

=> Solution la plus simple proportionnelle à $1/d$!

$$\alpha = G^p \cdot M^q \cdot d^r \cdot c^s \Rightarrow \alpha = \frac{GM}{c^2 d} \propto \frac{1}{d}$$

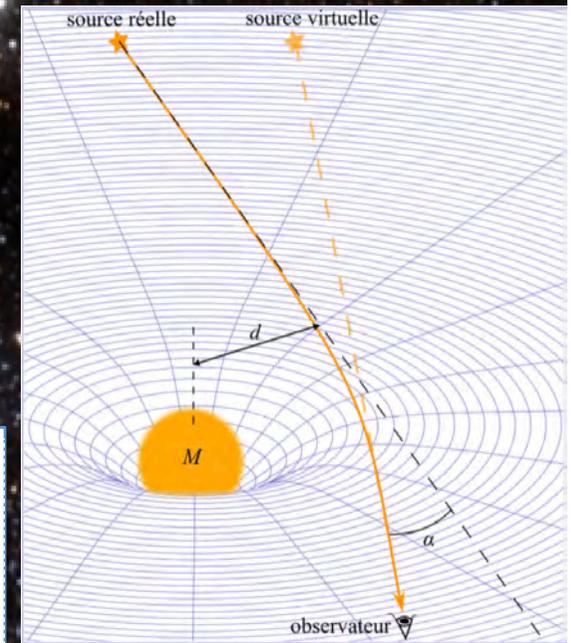
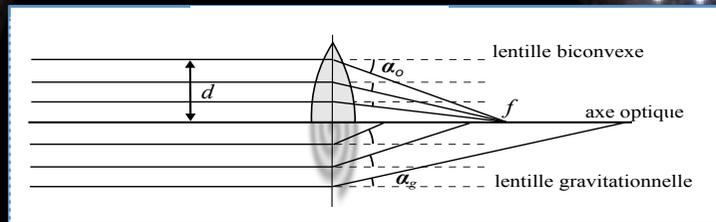


Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de l'angle de déviation α par simple analyse dimensionnelle (S5 ex1)

=> Solution la plus simple proportionnelle à $1/d$!

$$\alpha = G^p \cdot M^q \cdot d^r \cdot c^s \Rightarrow \alpha = \frac{GM}{c^2 d} \propto \frac{1}{d}$$



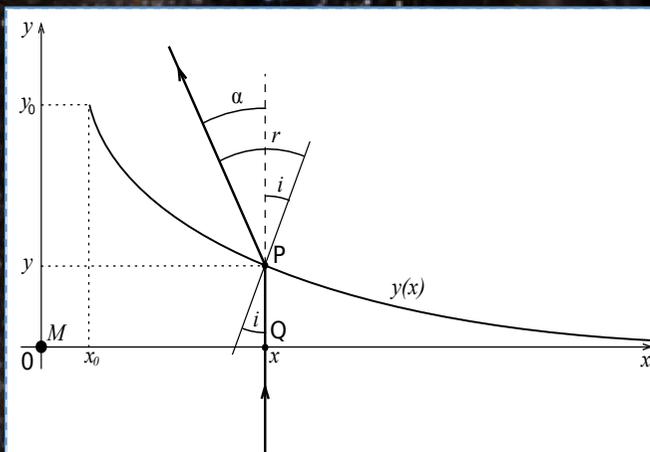
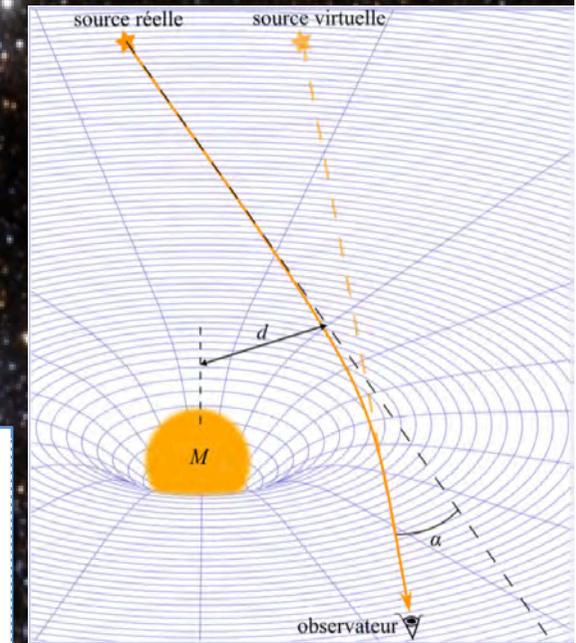
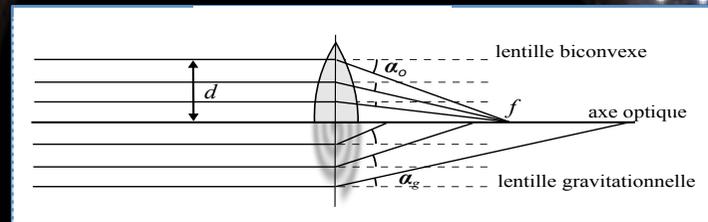
Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de l'angle de déviation α par simple analyse dimensionnelle (S5 ex1)

=> Solution la plus simple proportionnelle à $1/d$!

$$\alpha = G^p \cdot M^q \cdot d^r \cdot c^s \Rightarrow \alpha = \frac{GM}{c^2 d} \propto \frac{1}{d}$$

- Quelle forme doit avoir une lentille optique pour simuler une LG? (S5 ex7)



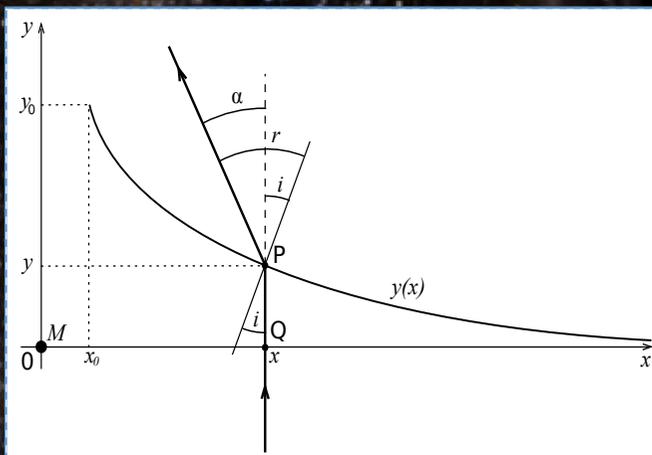
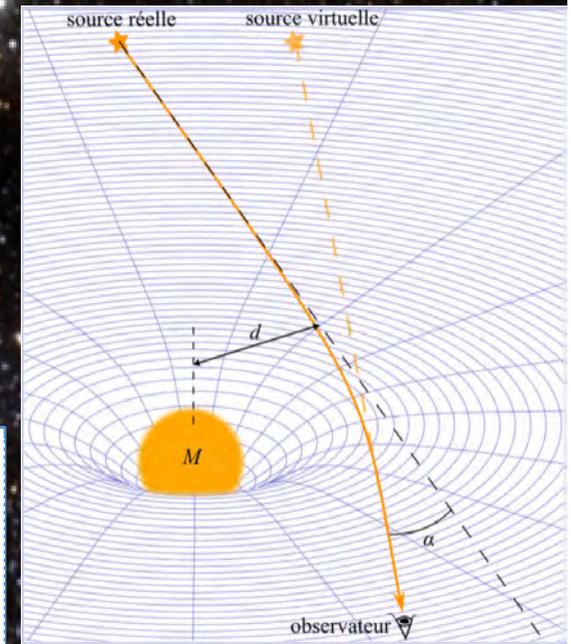
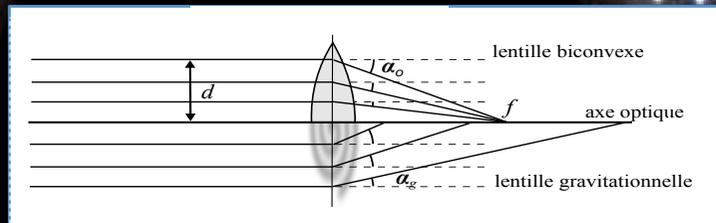
Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de l'angle de déviation α par simple analyse dimensionnelle (S5 ex1)

=> Solution la plus simple proportionnelle à $1/d$!

$$\alpha = G^p \cdot M^q \cdot d^r \cdot c^s \Rightarrow \alpha = \frac{GM}{c^2 d} \propto \frac{1}{d}$$

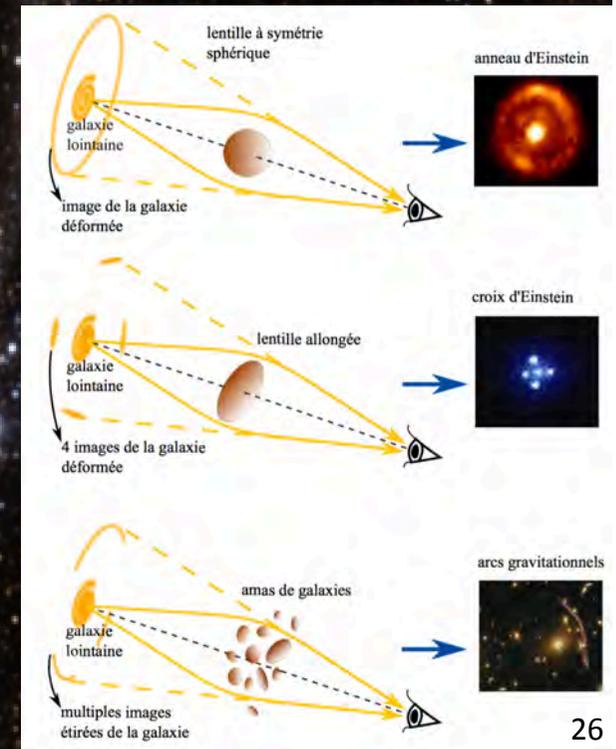
- Quelle forme doit avoir une lentille optique pour simuler une LG? (S5 ex7)



- Le rayon d'Einstein (croix ou cercle) pour déterminer la masse de la lentille (S5 ex5 + ex6)

=> Matière noire

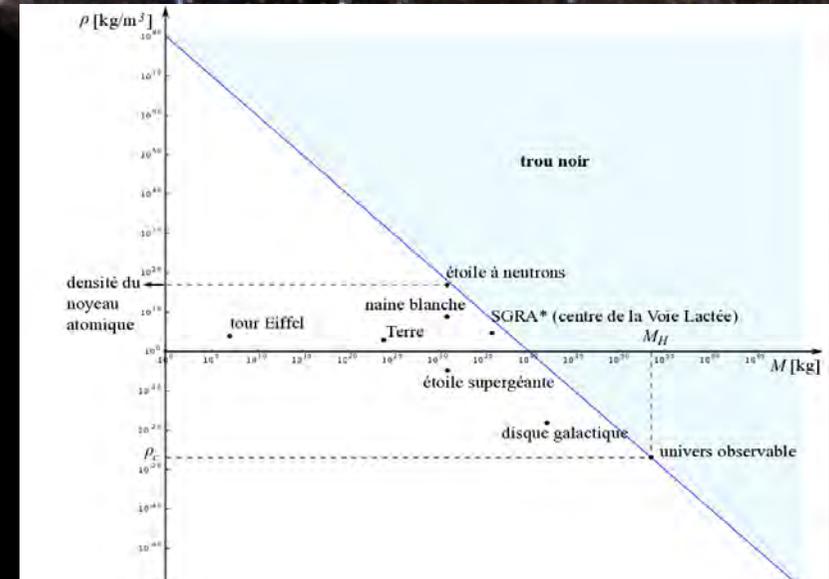
$$\theta_{Einst.} = \sqrt{\frac{4GM D_{SL}}{c^2 D_{LO} D_{SO}}}$$



- Formule de la vitesse de libération à partir de la conserv. de l'énergie mécanique $v_e^2 = 2GM/R$ (s6 ex3, 4, 5 + cours)
- Comparaison de v_e et de la vitesse thermique de différents gaz (H_2 , N_2) pour expliquer la présence d'atmosphère sur une planète (s6 ex3)
- Rayon de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$
=> pour $v_e = c$ (cours par. 6.3 + s6 ex4)
- La densité d'un trou noir décroît comme $1/M^2$ (cours + s6 ex3)

Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

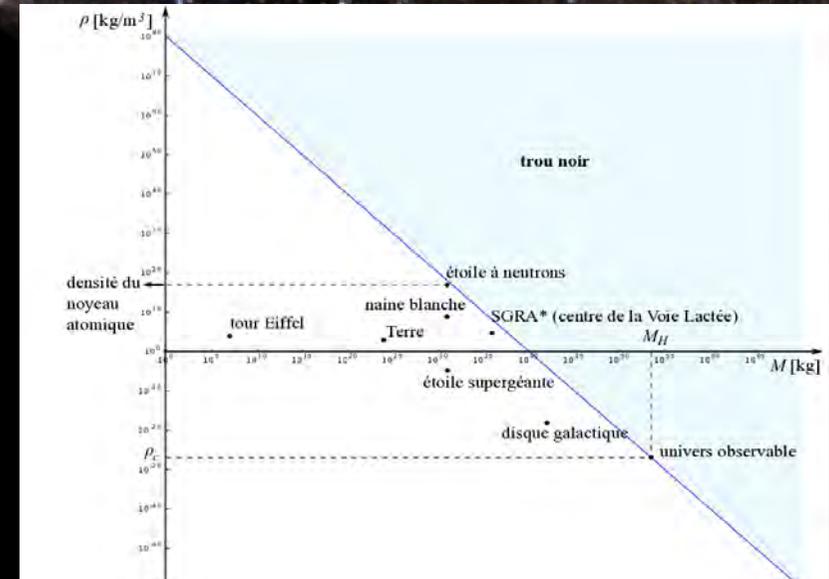
- Formule de la vitesse de libération à partir de la conserv. de l'énergie mécanique $v_e^2 = 2GM/R$ (s6 ex3, 4, 5 + cours)
- Comparaison de v_e et de la vitesse thermique de différents gaz (H_2 , N_2) pour expliquer la présence d'atmosphère sur une planète (s6 ex3)
- Rayon de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$
=> pour $v_e = c$ (cours par. 6.3 + s6 ex4)
- La densité d'un trou noir décroît comme $1/M^2$ (cours + s6 ex3)



Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de la vitesse de libération à partir de la conserv. de l'énergie mécanique $v_e^2 = 2GM/R$ (s6 ex3, 4, 5 + cours)

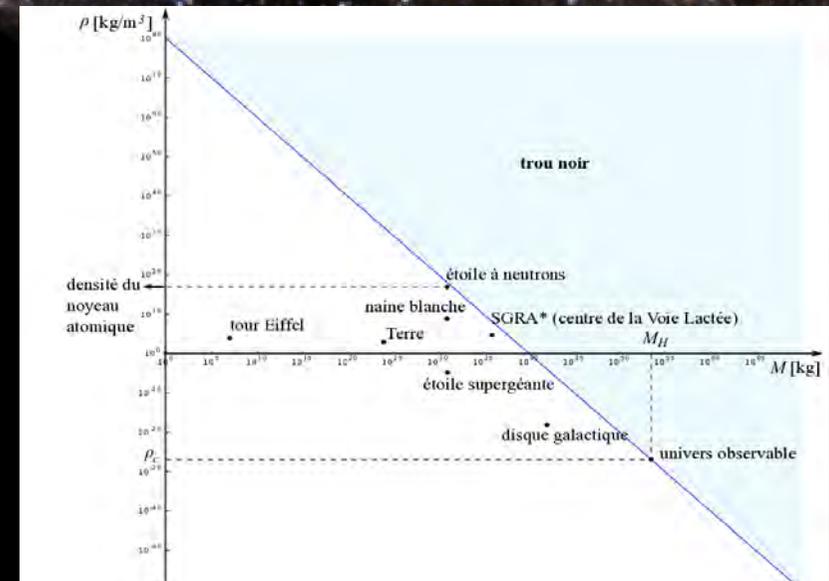
- Comparaison de v_e et de la vitesse thermique de différents gaz (H_2 , N_2) pour expliquer la présence d'atmosphère sur une planète (s6 ex3)
- Rayon de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$
=> pour $v_e = c$ (cours par. 6.3 + s6 ex4)
- La densité d'un trou noir décroît comme $1/M^2$ (cours + s6 ex3)



- Estimation de la température d'un trou noir à partir du « no hair theorem » et de son r_s , en utilisant la loi de Wien (Annexe D) (cours par 6.6 + s6 ex8)

Exemples d'activités: Ch. 5&6 (GL + BH)

- Formule de la vitesse de libération à partir de la conserv. de l'énergie mécanique $v_e^2 = 2GM/R$ (s6 ex3, 4, 5 + cours)
- Comparaison de v_e et de la vitesse thermique de différents gaz (H_2 , N_2) pour expliquer la présence d'atmosphère sur une planète (s6 ex3)
- Rayon de Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$
=> pour $v_e = c$ (cours par. 6.3 + s6 ex4)
- La densité d'un trou noir décroît comme $1/M^2$ (cours + s6 ex3)
- Estimation de la température d'un trou noir à partir du « no hair theorem » et de son r_s , en utilisant la loi de Wien (Annexe D) (cours par 6.6 + s6 ex8)
- ODG du temps d'évaporation d'un trou noir par la conservat. de la masse/énergie et la loi de Stefan-Boltzmann (Annexe D) (cours par 6.6 + s6 ex9 + ex10)



Au cœur de la cosmologie

Chapitres 7 et 8:
Equations cosmologiques et Histoire thermique de l'univers

- La constante cosmologique Λ (S7 ex1)

=> Pourquoi l'univers ne peut pas être statique

=> Pourquoi pour un univers statique ou pour un univers en expansion accélérée on utilise le même terme Λ

Exemples d'activités: Ch. 7&8 (Eq. Cos.)

- La constante cosmologique Λ (S7 ex1)

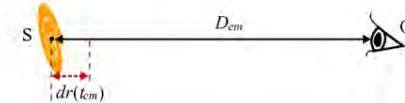
=> Pourquoi l'univers ne peut pas être statique

=> Pourquoi pour un univers statique ou pour un univers en expansion accélérée on utilise le même terme Λ

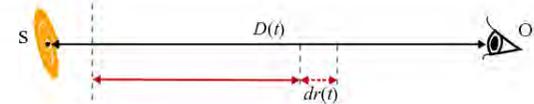
- Aux échelles cosmologiques on a 5 types de distance, dont seulement 2 mesurables (S7 ex2, 3 et 4)

=> études de fonctions, recherche max/min, cas limites liés à l'évolution de l'univers

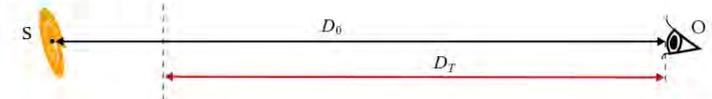
(a) entre t_{em} et $t_{em} + dt$ => $a = a(t_{em}) = 1/(1+z_{em})$



(b) entre t et $t + dt$



(c) $t = t_0$ => $a_0 = a(t_0) = 1$



Exemples d'activités: Ch. 7&8 (Eq. Cos.)

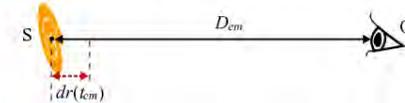
- La constante cosmologique Λ (S7 ex1)
 - => Pourquoi l'univers ne peut pas être statique
 - => Pourquoi pour un univers statique ou pour un univers en expansion accélérée on utilise le même terme Λ

- Aux échelles cosmologiques on a 5 types de distance, dont seulement 2 mesurables (S7 ex2, 3 et 4)

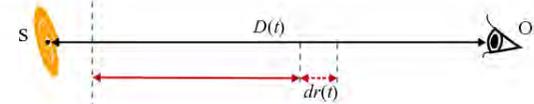
=> études de fonctions, recherche max/min, cas limites liés à l'évolution de l'univers

- Nécessité, d'un point de vue expérimental, d'avoir un $\Lambda \neq 0$ (S7 ex9)
 - => comparaison avec les données d'explosion de supernovae Ia du « Supernova Cosmology Project » de 1998
 - => terme d'accélération (énergie noire)

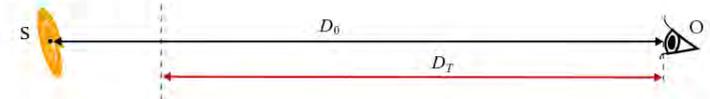
(a) entre t_{em} et $t_{em} + dt \Rightarrow a = a(t_{em}) = 1/(1+z_{em})$



(b) entre t et $t + dt$



(c) $t = t_0 \Rightarrow a_0 = a(t_0) = 1$

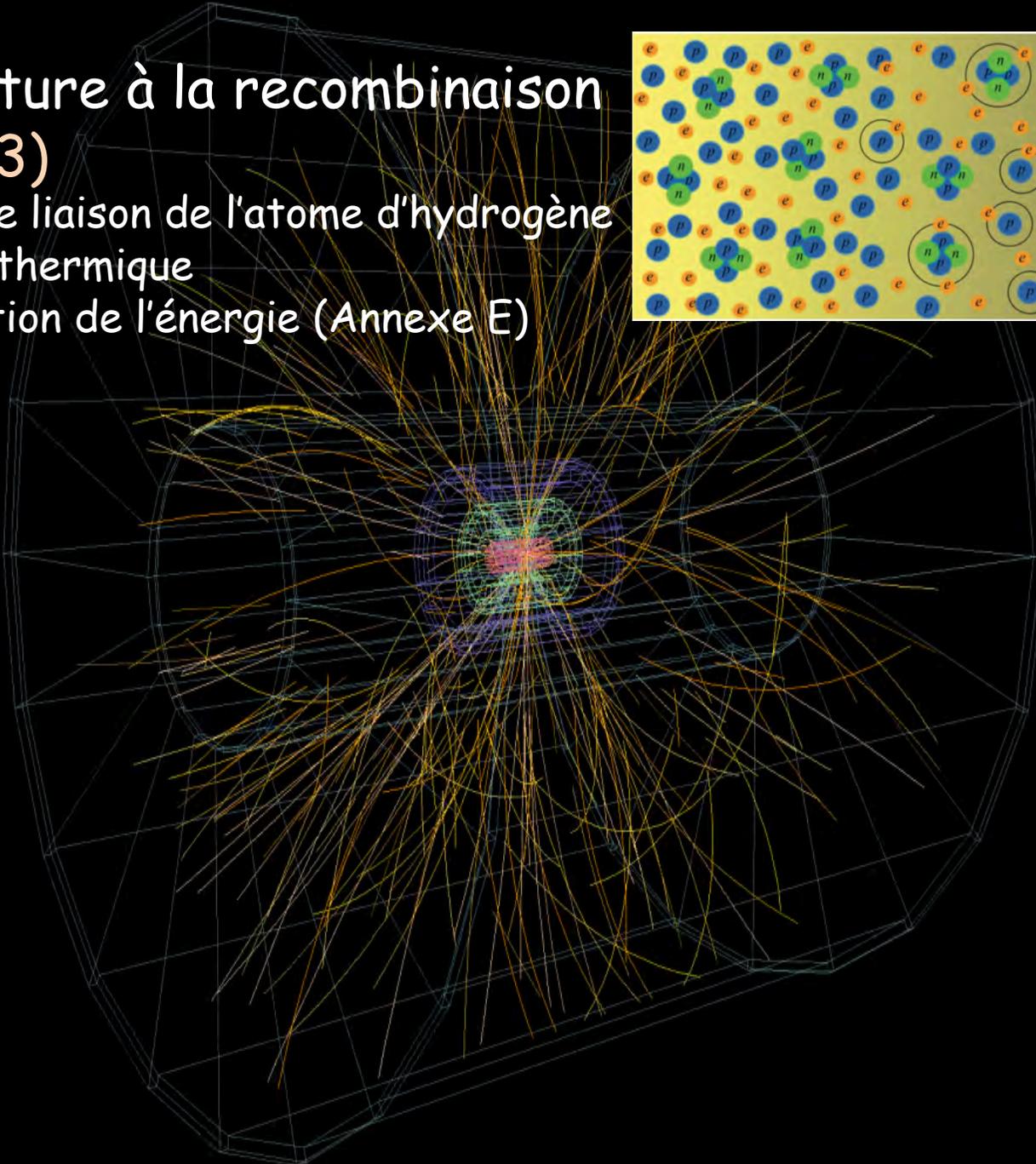
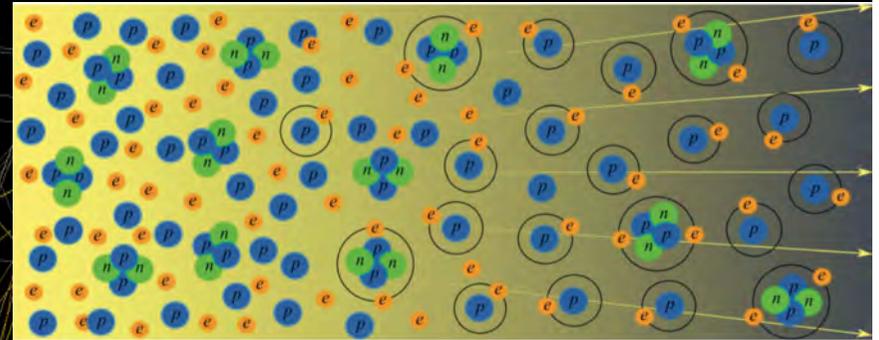


- Température à la recombinaison
(s8 ex2+3)

=> énergie de liaison de l'atome d'hydrogène

=> équilibre thermique

=> équipartition de l'énergie (Annexe E)

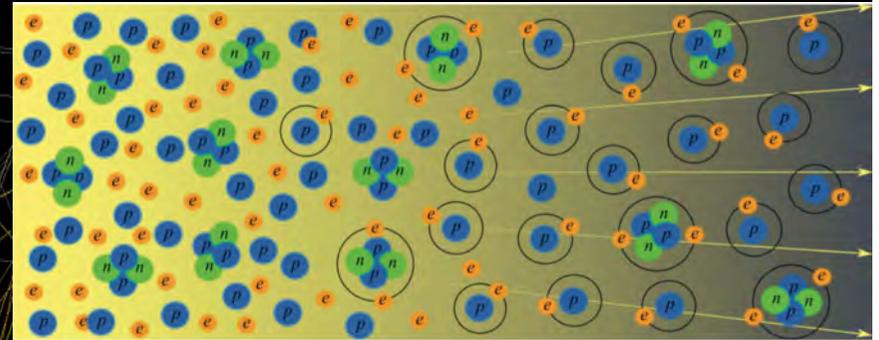


- Température à la recombinaison (s8 ex2+3)

=> énergie de liaison de l'atome d'hydrogène

=> équilibre thermique

=> équipartition de l'énergie (Annexe E)

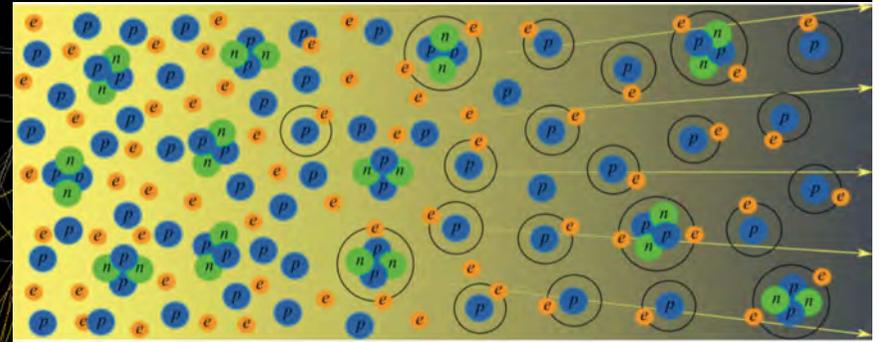


- Température de fusion (nucléosynthèse) (s8 ex4, 5 et 6)

➤ Estimation « classique » de son ODG à partir de la taille du noyau atomique et du potentiel coulombien (s8 ex4 + ex 5)

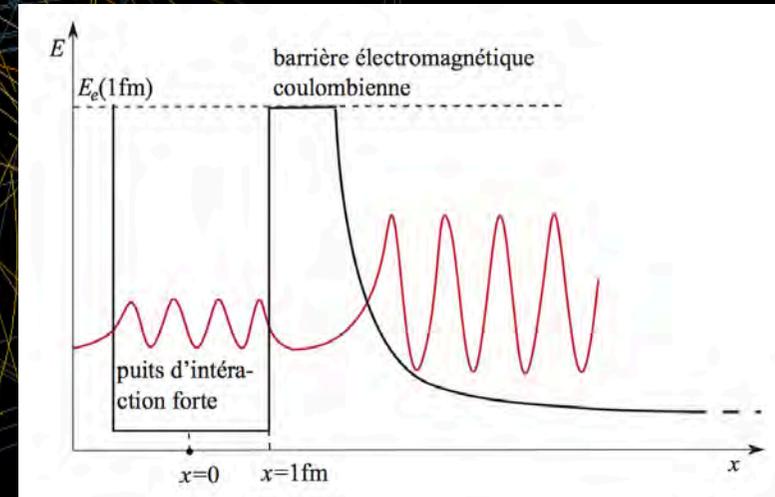
- Température à la recombinaison (s8 ex2+3)

- => énergie de liaison de l'atome d'hydrogène
- => équilibre thermique
- => équipartition de l'énergie (Annexe E)



- Température de fusion (nucléosynthèse) (s8 ex4, 5 et 6)

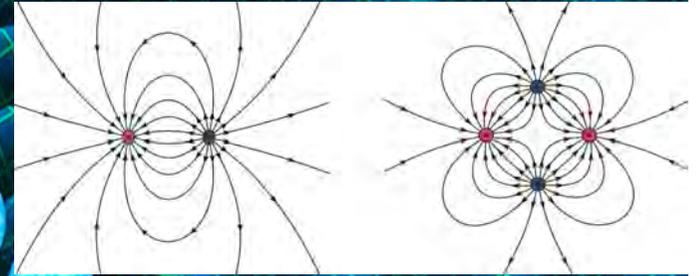
- Estimation « classique » de son ODG à partir de la taille du noyau atomique et du potentiel coulombien (s8 ex4 + ex 5)
- Nécessité d'une explication au niveau non classique pour expliquer la température de fusion observée: introduction de l'effet tunnel quantique (Annexe G) (s8 ex6)



L'espace-temps en mouvement

Chapitre 9: Ondes gravitationnelles

- Faiblesse des OG et formule du quadrupole (s9 ex1, 2, 3)
 - comparaison interaction gravitationnelle / électrique (rappel s1, ex6)
 - émission de quadrupole/dipôle (cours par 9.1 + s9, ex1)

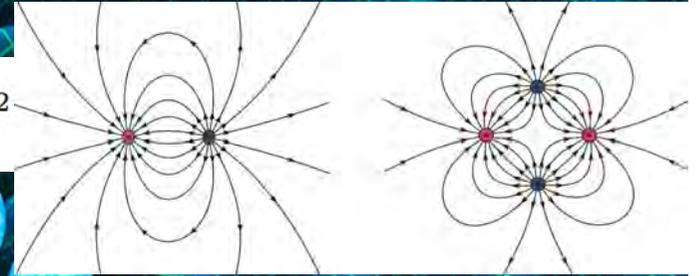


• Faiblesse des OG et formule du quadrupole (s9 ex1, 2, 3)

- comparaison interaction gravitationnelle / électrique (rappel s1, ex6)
- émission de quadrupole/dipôle (cours par 9.1 + s9, ex1)
- nécessité d'avoir des sources
 - 1) relativistes (s9, ex3)
 - 2) avec des masses astronomiques (s9, ex2)

=> trous noirs ou étoiles à neutrons

$$h = \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{M}{r} \cdot \omega^2 R^2$$

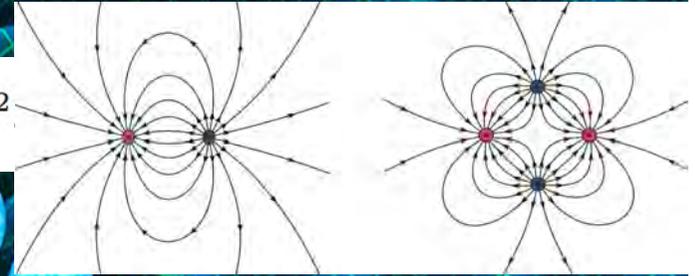


• Faiblesse des OG et formule du quadrupole (s9 ex1, 2, 3)

- comparaison interaction gravitationnelle / électrique (rappel s1, ex6)
- émission de quadrupole/dipôle (cours par 9.1 + s9, ex1)
- nécessité d'avoir des sources
 - 1) relativistes (s9, ex3)
 - 2) avec des masses astronomiques (s9, ex2)

=> trous noirs ou étoiles à neutrons

$$h = \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{M}{r} \cdot \omega^2 R^2$$



• Relation entre

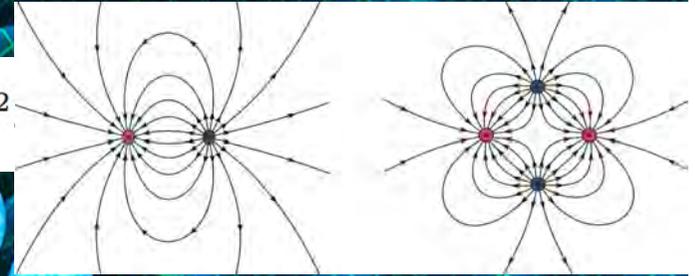
- M_{source} et f_{og} (s9 ex4)
- f_{og} et $L_{detecteur}$ (s9 ex6)



• Faiblesse des OG et formule du quadrupole (s9 ex1, 2, 3)

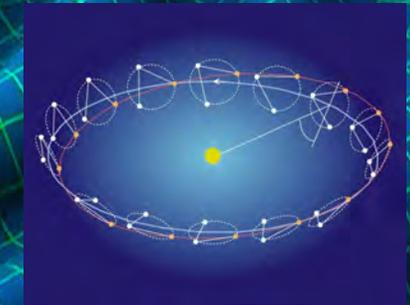
- comparaison interaction gravitationnelle / électrique (rappel s1, ex6)
- émission de quadrupole/dipôle (cours par 9.1 + s9, ex1)
- nécessité d'avoir des sources
 - 1) relativistes (s9, ex3)
 - 2) avec des masses astronomiques (s9, ex2)=> trous noirs ou étoiles à neutrons

$$h = \frac{\Delta L}{L} \approx \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{M}{r} \cdot \omega^2 R^2$$



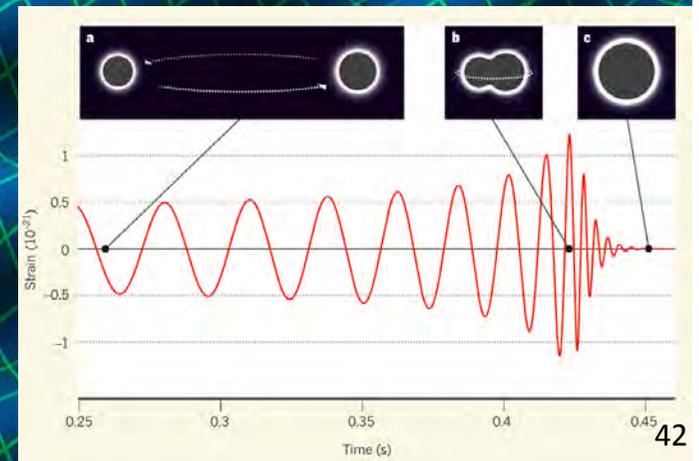
• Relation entre

- M_{source} et f_{og} (s9 ex4)
- f_{og} et $L_{detecteur}$ (s9 ex6)



• La détection historique GW091415 (s9 ex7)

=> Révision des notions de : redshift d'une source, énergie, puissance, rendement
=> Conséquences pour l'astrophysique et la cosmologie





“

Science is
competitive,
aggressive,
demanding.
It is also
imaginative,
inspiring,
uplifting.

”

—VERA
RUBIN

World
Science
Festival