Cosmologie et relativité générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentilles gravitationnelles
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes gravitationnelles

- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
- Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Didactique de la physique

Suggested citation:
A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)
Cosmologie et relativité générale : Activités pour les élèves du Secondaire II,
Série 9 : Ondes gravitationnelles
(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; http://www.nccr-swissmap.ch/education

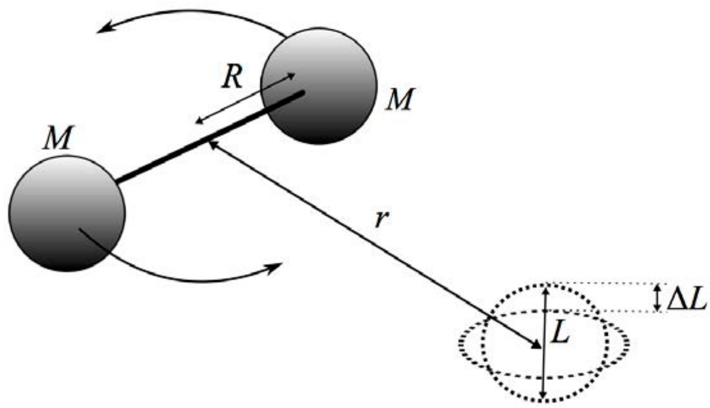
Série 9 : Ondes gravitationnelles

Rappel : Pour une onde périodique où f est la fréquence, λ la longueur d'onde, c la vitesse, T la période et ω la vitesse angulaire de rotation du mouvement circulaire uniforme associé,

$f = 1 / T$, $\lambda \cdot f = \lambda / T = c$, $\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot f$.

Exercice 1 : Le haltère

Une onde gravitationnelle est générée par un système binaire de deux masses M identiques (à symétrie sphérique), en rotation à une distance $d = 2R$ l'une de l'autre. L'onde se propage et atteint un anneau de matière « test », de diamètre L, situé à une distance r du centre de rotation. L'onde voyage dans la direction perpendiculaire au plan de l'anneau[1] et produit une déformation relative sur celui ci, $\Delta L/L = h$ dont la formule est donnée dans le paragraphe 9.2 de la théorie :



$$h = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{M}{r} \cdot \omega^2 R^2.$$

ω est la vitesse angulaire de rotation des masses autour de leur centre : $\omega = 2\pi/T = 2\pi{\cdot}f$.

a) Exprimer cette formule en fonction du rayon de Schwarzschild de M.

b) Expliquer pourquoi cette quantité est toujours plus petite que 1.

c) Calculer h pour des ondes générées par la rotation d'un haltère terrestre composé de deux masses d'une tonne chacune à une distance d = 2m, et à une fréquence f = 1kHz, sur un corps à r = 10m de distance.

Exercice 2 : Une déformation facilement mesurable ?

Supposons qu'il existe un système binaire tournant à une vitesse proche de celle de la lumière ($v = \omega R \sim c$). Ceci est possible uniquement lorsque les deux masses ont une distance comparable à leur rayon de Schwarzschild ($R \sim R_s$).

a) Dans ce cas, quel est l'ordre de grandeur du rapport M/r pour avoir une déformation relative $h \sim 10^{-3}$, plus facilement mesurable (un anneau d'1m subirait une déformation de l'ordre du millimètre) ?

b) Quels objets astrophysiques existent ayant ce rapport ?

[1] La position de l'anneau par rapport à l'axe de rotation du système binaire et le type d'onde qui le traverse (transversale ou longitudinale) n'ont pas d'influence sur l'importance de la déformation relative h.

Exercice 3 : Vitesse de rotation relativiste : pour quels objets ?

Dans l'exercice 1 nous avons vu que l'amplitude d'une onde gravitationnelle générée par un système binaire symétrique a une forte dépendance (au carré) du rapport entre la vitesse de rotation du système et c : $h \propto \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2$. Considérons maintenant un système lié gravitationnellement, formé d'une petite masse m tournant autour d'une grande masse M, avec $m << M$, à une distance R.

a) En utilisant la deuxième loi de Newton appliquée au mouvement circulaire uniforme de m, démontrer que si la vitesse de rotation de m approche celle de la lumière, alors le rayon de sa trajectoire circulaire R doit approcher la moitié du rayon de Schwarzschild de la masse M:

$$v \approx c \quad \Rightarrow \quad R \approx \frac{R_S}{2} = \frac{GM}{c^2}.$$

b) Quels objets ont la propriété d'avoir toute leur masse contenue à l'intérieur de leur rayon de Schwarzschild?

Exercice 4 : Fréquence et masse génératrice

La fréquence caractéristique d'une onde gravitationnelle émise par un système binaire est la même que celle de rotation du système et dépend de la valeur de ses masses M (qu'on suppose égales par simplicité). Pour que la radiation soit la plus intense possible, ces masses doivent tourner à une vitesse presque égale à la vitesse de la lumière ($v = \omega R \sim c$). Pour cela, elles doivent orbiter à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild (2 ou 3 fois son r_S) et donc être très compactes: par exemple de trous noirs (ou des objets de densité proche à celle des trous noirs).

a) En utilisant la relation entre la masse et le rayon de Schwarzschild d'un corps, écrire une formule donnant l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire du système ω (en rad/s) en fonction de la masse des ses composantes, puis celle de la fréquence f (en Hz).

b) Déterminer quelle est la fréquence caractéristique d'un système de trous noirs stellaires, d'une masse de l'ordre d'une dizaine de masses solaires.

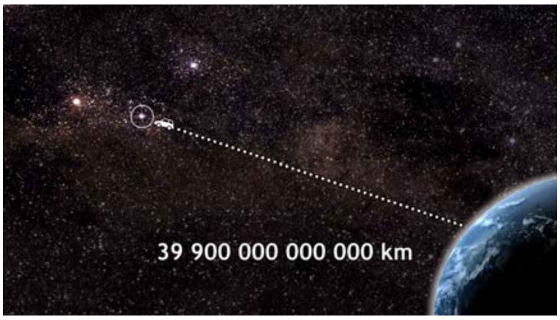
c) Faire le même calcul pour un système de trous noirs supermassifs (noyaux des galaxies), de l'ordre du million de masses solaires.

Exercice 5 : Variation de la distance d'une étoile

Parmi les ondes gravitationnelles les plus intenses qui pourraient provenir d'objets présents dans notre galaxie ($r \sim$ kpc) il y a celles dues à la phase finale du mouvement rotatoire de deux trous noirs d'une masse solaire chacun, juste avant leur collision. Dans cette phase les trous noirs orbitent à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild, donc à une vitesse orbitale proche de celle de la lumière ($v = \omega R \sim c$).

a) Estimer quelle serait la déformation relative h dans ce cas très optimiste.

b) Quelle serait la variation ΔL de la distance entre la Terre et l'étoile la plus proche, Proxima Centauri, causée par le passage d'une telle onde?



Crédit : http://www.futura-sciences.com

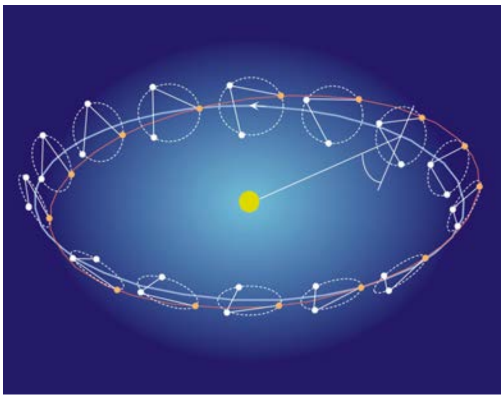
Exercice 6 : Fréquence et taille du détecteur

Chaque instrument possède une bande de fréquences pour lesquelles il est mieux adapté à la détection d'ondes gravitationnelles, en fonction de sa longueur L. En effet, si la période d'oscillation d'une onde est égale ou plus petite que la durée t employée par la lumière pour traverser l'instrument, plusieurs contributions à la déformation ΔL de signe différent se superposent et s'annulent. On considère qu'un détecteur est suffisamment efficace lorsque la durée t de sa traversée par la lumière est au moins 10 fois plus petite que la période T de l'onde qu'on souhaite détecter : $0{,}1T \sim t \ll T$.

a) En utilisant les considérations ci-dessus, écrire une formule donnant la fréquence maximale qu'une onde peut avoir pour qu'elle soit détectable par un instrument de dimension L.

b) Quelle doit être L pour détecter une onde de fréquence comprise entre une dizaine de Hz et un kHz? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquences? Peut-on construire des détecteurs d'ondes gravitationnelles de cette taille ?

c) L'interféromètre spatial LISA, qui sera lancé en orbite héliocentrique dans les années 2030, possède des bras de 5 millions de km. Quelles fréquences pourra-t-il détecter ? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquence ?

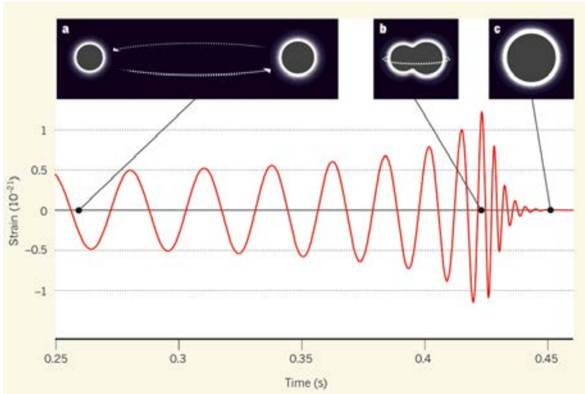

Crédit : NASA https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LISA-orbit.jpg

Exercice 7 : GW091415

La première détection historique d'onde gravitationnelle a été faite le 14 septembre 2015 (GW091415) par les deux interféromètres LIGO aux Etats Unis. Il s'agit de la collision entre deux trous noirs de masses $M_1 = 29M_{Soleil}$ et $M_2 = 36M_{Soleil}$, à une distance r = 400Mpc de la Terre. Le trou noir obtenu après la collision est de 62 masses solaires.

On a pu observer

a) le signal des dernières 8 périodes du mouvement de rotation de deux trous noirs, dans une bande de fréquence entre 35Hz et150Hz,
b) la collision à 150Hz,
c) la phase de « ringdown », pendant laquelle le trou noir final, de forme asymétrique, irradie des ondes pour retrouver une forme sphérique. La durée totale du signal a été de 0,45s.



Crédit: 2016 Macmillan Publishers Limited, Nature 17306

Une reconstruction artistique de cet événement peut être visualisée sur le site de la NASA :

Crédit: http://www.nasa.gov/mov/116648main_CollidingWdwarves.mov

a) À partir de la distance r de la collision, déterminer le redshift correspondant. Il y a combien d'année cette collision s'est-elle vérifiée ?

b) Quelle est la variation de masse du système lors de la collision ?

c) En supposant que toute cette masse a été convertie en énergie radiative, quelle est l'énergie irradiée lors de cette collision ? *Donner la réponse en* $M_{Soleil} \cdot c^2$ *et en J.*

d) Quelle est la puissance moyenne irradiée pendant la durée observée ? Existe-t-il des phénomènes connus avec une puissance comparable ?

e) Calculer le rendement de cette collision : $\eta = \Delta E_{irradiée}/E_{tot}$.

La réaction de fusion nucléaire la plus énergétique est la suivante (production d'un noyau d'hélium) : $^2H + {}^3He \rightarrow {}^4He$ + proton + 18,4MeV. Calculer son rendement énergétique et le comparer avec celui de la collision GW091415. La masse du proton est $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg = 938 MeV/c^2$.