Cosmologie et relativité générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs

- Série 2 : Expansion

- Série 3 : Principe d'équivalence

- Série 4 : Courbure

- Série 5 : Lentilles gravitationnelles

- Série 6 : Trous noirs

- Série 7 : Equations cosmologiques

- Série 8 : Chronologie du Big Bang

- Série 9 : Ondes gravitationnelles

- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique

- Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Didactique de la physique

Suggested citation:
A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)
Cosmologie et relativité générale : activités pour les élèves du Secondaire II,
Série 7 : Equations cosmologiques
(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; http://www.nccr-swissmap.ch/education

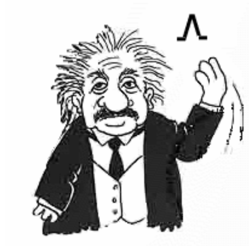
Série 7 : Equations cosmologiques

Exercice 1 : La constante cosmologique d'Einstein

a) Réécrire la première équation cosmologique dans un univers dominé uniquement par la matière en explicitant le terme contenant la vitesse du facteur d'échelle $\dot{a}^2(t)$. Expliquer pourquoi aujourd'hui, au temps $t = t_0$ ($a_0 = a(t_0) = 1$), cette équation n'admet pas de solution statique.

b) Au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle l'idée que l'univers ne soit pas statique était difficile à accepter. Pour cette raison, Einstein introduit un terme à la première équation cosmologique: la constante cosmologique Λ_E. Réécrire la première équation cosmologique pour l'univers dominé par la matière, mais en ajoutant le terme Λ_E. Quelle devrait être la valeur de Λ_E aujourd'hui (au temps t_0) pour que l'univers soit statique ? Est-ce une valeur positive ou négative ? (Prendre pour la densité de matière aujourd'hui $\rho_{m0} \approx 10^{-28} kg/m^3$).

c) Montrer que – même si aujourd'hui l'univers était statique ($\dot{a}(t_0) = 0$) – il serait instable : une valeur de la vitesse ultrapetite ($\dot{a}(t_0) = \varepsilon << 1$) impliquerait une accélération $\ddot{a}(t_0)$ non nulle. Qu'en déduire ? *Pour obtenir l'accélération du facteur d'échelle $\ddot{a}(t)$, dériver la première équation cosmologique par rapport au temps.*



Exercice 2 : La bonne distance

a) Ecrire les formules de (1) la distance ***comobile*** D_0, (2) la distance ***propre au moment de l'émission*** D_{em} et (3) la distance ***de traversée*** D_T d'une même source avec redshift z_s.

b) Cocher la bonne réponse en justifiant le choix effectué : la distance traversée D_T est
- ☐ plus petite que D_{em} ;
- ☐ entre D_{em} et D_0 ;
- ☐ plus grande que D_0 .

c) Intégrer chacune des formules écrites au point a), dans le cas où $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$ et trouver quel est le comportement (la limite) en fonction de z_s lorsque $z_s \to \infty$.

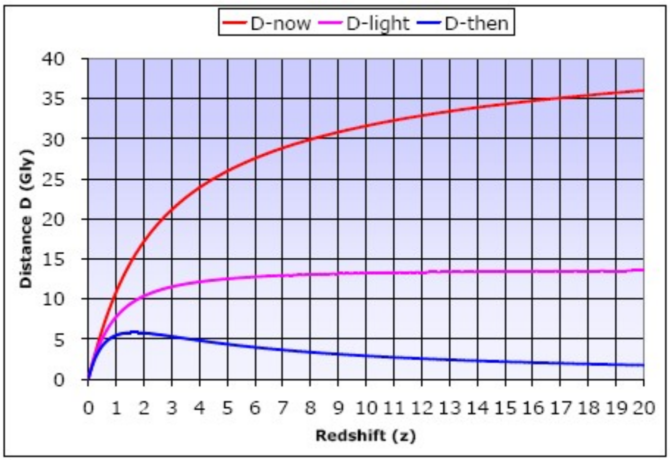
d) Les approximations faites au point c) sont-elles raisonnables pour les sources à haut redshift observées?

e) Calculer la quantité $D_T(z_e)/c$ obtenue au point c) pour $z_s \to \infty$? Que représente t-elle ?

Exercice 3 : Âge de l'univers (numérique)

Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ (https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model) pour calculer l'âge de l'univers à partir de la formule de la distance de traversée. Faire l'intégration de manière numérique en utilisant un langage de programmation adéquat (par exemple Phython, Octave, Scilab).

Exercice 4 : D_{em} maximale



Le graphique ci-contre représente, en fonction du redshift, D_0 (« D-now », ligne plus haute, en rouge), D_T (« D-light », ligne du milieu, en rose), et D_{em} (« D-then », ligne du bas, en bleu) obtenues par l'intégration numérique avec H_0 = 70km/s/Mpc, $\Omega_{\Lambda 0} = 0{,}7$ et $\Omega_{m0} = 0{,}3$.
Si pour des petits z_S ces trois distances tendent à être les mêmes, l'écart entre elles devient de plus en plus grand pour des grands z_S, et elles commencent à se différencier avant $z_S = 1$. Comme on a déjà pu l'observer dans l'exercice 2, D_{em} tend à diminuer lorsque le redshift devient assez grand.

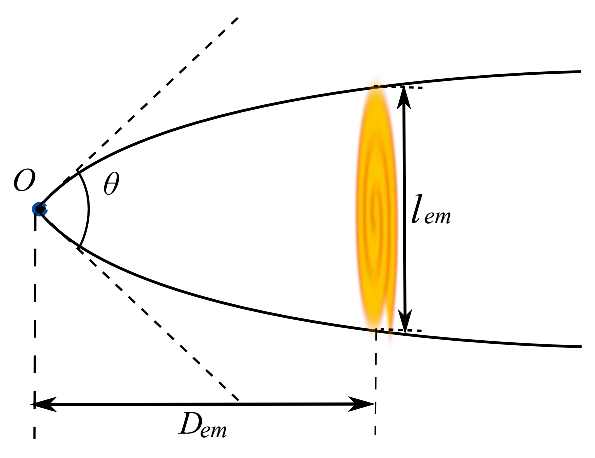
a) Quelle explication physique peut-on donner à ce résultat ?
b) En supposant un univers uniquement de matière ($\Omega_m = 1$) et en utilisant les résultats de l'exercice 2, déterminer à quel redshift la distance propre au moment de l'émission serait maximale.

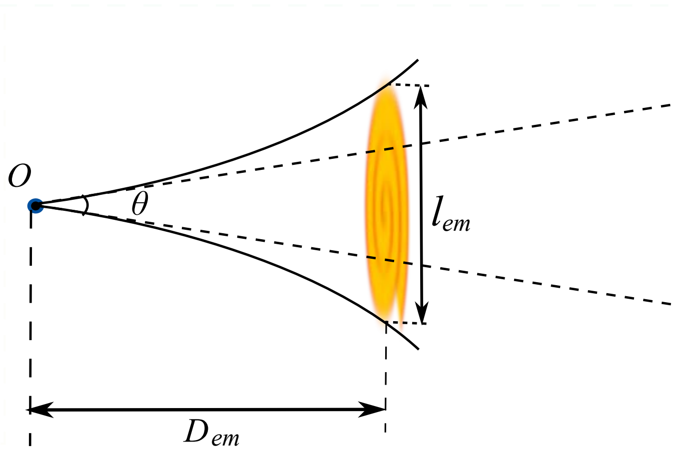
Exercice 5 : Distance de diamètre angulaire $D_A(z_s)$

La ***distance de diamètre angulaire*** D_A est la distance apparente d'une source déduite à partir de la mesure de son diamètre angulaire θ. Elle est utilisée dans les mesures des lentilles gravitationnelles ou de tailles des fluctuations du CMB.

a) Avec quelle autre distance cosmologique coïncide D_A dans un univers plat en expansion? Ecrire sa formule intégrale en fonction de z_s et des paramètres cosmologiques.

b) Compléter les dessins ci-dessous pour expliquer pourquoi, dans un univers dont la courbure n'est pas nulle, D_A ne coïncide pas avec D_{em} et spécifier dans quel cas D_A est plus grande ou plus petite que D_{em}.





Exercice 6 : Distance de luminosité $D_L(z_s)$

En plus que les quatre distances cosmologiques déjà étudiées dans ce chapitre, il existe un autre type de distance mesurable: la ***distance de luminosité D_L***. Elle est utilisée en cosmologie pour les sources dont on connaît la luminosité L (la puissance radiative en W), appelées « chandelles standard » (par exemple les supernovae Ia, vues au chapitre 2), et en la comparant au flux f (c'est à dire la puissance radiative par unité de surface en W/m^2) reçu.

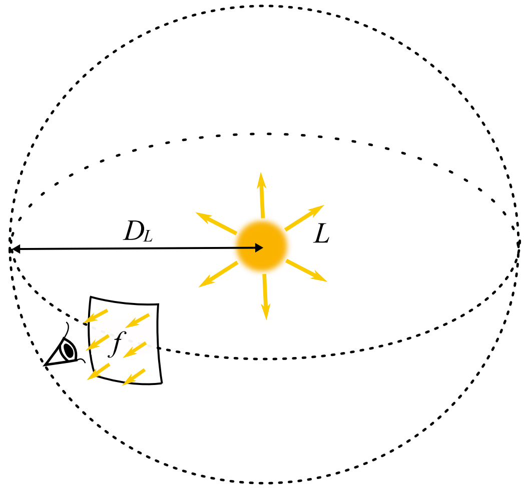
De manière générale, quand on se trouve à une distance D_L d'une source de luminosité L, le flux est

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2}. \qquad (1)$$

De plus, nous pouvons exprimer le flux d'une source qu'irradie en fonction de sa température T en utilisant la loi de Stefan – Boltzmann (Annexe D.2) :

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2} = \sigma \cdot T^4, \qquad (2)$$

où la constante de Stefan – Boltzmann vaut
$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}.



a) Imaginons que l'univers « arrête » son expansion au temps t_{em}, lorsque la lumière de la source est émise à une température T_{em}. Parmi les distances cosmologiques étudiées jusqu'à maintenant (D_T, D_0 ou $D_{em}=D_A$), laquelle devrait-on utiliser dans la formule (2) ci-dessus (à la place du D_L) ? Réécrire cette formule en remplaçant le R par la distance adéquate et le T par T_{em}.

b) Puisque l'univers est en expansion, nous recevons un flux d'énergie plus petit que si l'univers avait été statique depuis l'émission, notamment à cause de la diminution de la température de la radiation: aujourd'hui nous mesurons une température $T_0 < T_{em}$, parce que la longueur d'onde a augmenté : $\lambda_0 > \lambda_{em}$. Ecrire la relation entre T_0 et T_{em} à partir de celle entre λ_0 et λ_{em} en utilisant la loi de Wien (Annexe D.1).

c) Ecrire l'équation (2) dans l'univers en expansion: en remplaçant T par T_0.

d) Utiliser la formule écrite au point c) et la relation entre T_0 et T_{em} pour exprimer D_L en fonction de D_{em} et du facteur d'échelle a_{em}.

e) Dans l'équation obtenue au point d), remplacer D_{em} par son expression intégrale en fonction de z_s pour trouver la formule donnant D_L en fonction de z_s.

Exercice 7 : D_L dans un univers de matière

a) Comparer D_L aux autres distances cosmologiques écrites au point a): est-elle plus grande ou plus petite, pour un z_s donné? Comment peut-on expliquer cela ?

b) Calculer l'intégrale de la distance lumineuse de manière analytique dans le cas où $\Omega_m = 1$ et $\Omega_\Lambda = 0$ et trouver quel est son comportement en fonction de z_s lorsque $z_s \to \infty$.

c) Calculer la même intégrale analytiquement dans le cas où $\Omega_m = 0$ et $\Omega_\Lambda = 1$ et trouver quel est son comportement en fonction de z_s lorsque $z_s \to \infty$.

d) Quel est l'effet de la constante cosmologique Ω_Λ sur la distance de luminosité ?

Exercice 8 : Ecart entre les distances cosmologiques

Les expressions pour les cinq distances cosmologiques en fonction du redshift sont des intégrales qui ne peuvent pas être résolues analytiquement si on tient compte de tous les paramètres de densité. Toutefois, des programmes le font de manière numérique pour une source avec un redshift donné. Par exemple le premier sur le site suivant :

https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology_calc.html

En utilisant ce programme donner les cinq distances cosmologiques pour des sources placées respectivement aux redshifts 0,2, 2, 20, 200. Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ (https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model).
Que remarque-t-on ?

z_s	D_L	D_0	D_T	$D_A = D_{em}$
0,20				
2,0				
20				
200				

Exercice 9 : L'énergie noire (numérique)

a) Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres H_0, Ω_m et Ω_Λ (https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model) et un langage de programmation adéquat (par exemple Phython, Octave ou Scilab) pour dessiner le graphique de $D_L(z_s)$ en Mpc (possibilité de faire le graphique en échelle $\log_{10}$).

b) Dans le même graphique, dessiner les courbes des fonctions analytiques de $D_L(z_s)$ obtenues dans les points b) et c) de l'exercice 7 (resp. $D_L(z_s)$ pour $\Omega_m = 1$ et $D_L(z_s)$ pour $\Omega_\Lambda = 1$).

c) Dans le même graphique, dessiner les points représentant les mesures de D_L et z_S pour les 59 supernovae Ia obtenues en 1998 par l'équipe du Supernova Cosmology Project http://supernova.lbl.gov/ :

n.	D_L[Mpc]	z_s		n.	D_L[Mpc]	z_s		n.	D_L[Mpc]	z_s
0	3304	0,458		20	6166	0,828		40	2366	0,416
1	2168	0,354		21	3119	0,450		41	5297	0,830
2	1932	0,425		22	3062	0,430		42	129,4	0,030
3	1600	0,374		23	3565	0,580		43	243,2	0,05
4	2344	0,420		24	5675	0,763		44	119,1	0,026
5	2051	0,372		25	3090	0,526		45	351,6	0,075
6	2377	0,378		26	783,4	0,172		46	130,6	0,026
7	3119	0,453		27	4169	0,619		47	56,75	0,014
8	3357	0,465		28	5546	0,592		48	492,0	0,101
9	3999	0,498		29	3648	0,550		49	78,70	0,020
10	3266	0,655		30	883,1	0,180		50	155,6	0,036
11	2148	0,400		31	3664	0,374		51	241,0	0,045
12	3148	0,615		32	3034	0,472		52	198,6	0,043
13	2831	0,480		33	2366	0,430		53	95,94	0,018
14	2301	0,450		34	4227	0,657		54	326,6	0,079
15	2455	0,388		35	3963	0,612		55	520,0	0,088
16	3266	0,570		36	1706	0,320		56	322,10	0,063
17	3019	0,490		37	3597	0,579		57	335,7	0,071
18	2667	0,495		38	2667	0,450		58	233,3	0,052
19	3750	0,656		39	3006	0,581				

Crédit : http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133v1.pdf
Dans le tableau ci-dessous nous avons converti la magnitude en distance lumineuse, car dans le papier original seulement les magnitudes des supernovae sont données.

d) Qu'en déduire ?